SERIE STI GE SESSION JUIN 2003 France METROPOLITAINE

Exercice 2 (Enoncé)

On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes. A l'instant $t = 0$, on suppose le condensateur chargé, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit. On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulombs, du condensateur à l'instant t.
On définit ainsi une fonction q , deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, dont la dérivée première est notée q'.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E) :}\qquad y'' + \frac{1}{\text{LC}}y = 0$$

où y est définie et deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et de dérivée seconde y''.
Dans tout l'exercice on prend C $=1,25 \times 10^{-3}$ et L $= 0,5 \times 10^{-2}$.

1. (a) Montrer que q est alors solution de l'équation différentielle

$$\text{(E) :}\qquad y'' + 1,6 \times 10^5 y = 0.$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle (E).

   (c) Déterminer la solution particulière q de (E) vérifiant :

$$q(0) = 6 \times 10^{-3} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

2. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t) = -q'(t)$. On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (a) Vérifier que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

$$i(t) = 2,4\sin(400t).$$

   (b) Calculer : $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\,\mathrm{d}t.$

   (c) On désigne par I_e la valeur, exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit. Son carré est donné par la formule :

$$\text{I}_e^2 = \frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer I_e^2 (on pourra utiliser la formule $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$), puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près, sachant que I_e est un nombre positif.